维基百科

B函数

维基百科，自由的百科全书

B函数，又称为**贝塔函数**或**第一类欧拉积分**，是一个特殊函数，由下式定义：

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

其中$\mathrm{Re}(x),\mathrm{Re}(y)>0$。

目录

性质

B函数具有以下對稱性質：

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x).$$

当x,y是正整数的时候，我们可以从伽马函数定义得到如下式子：

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{(x-1)!\,(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

它有许多其它的形式，包括：

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\mathrm{B}(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta,\qquad \mathrm{Re}(x)>0,\ \mathrm{Re}(y)>0$$

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}(x)>0,\ \mathrm{Re}(y)>0$$

$$\mathrm{B}(x,y)=\sum_{n=0}^\infty \frac{\binom{n-y}{n}}{x+n},$$

$$\mathrm{B}(x,y)=\prod_{n=0}^\infty \left(1+\frac{xy}{n(x+y+n)}\right)^{-1},$$

$$\mathrm{B}(x,y)\cdot \mathrm{B}(x+y,1-y)=\frac{\pi}{x\sin(\pi y)},$$

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{1}{y}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n!(x+n)}$$

其中Γ是伽玛函数。

就像伽玛函数描述了阶乘一样，我们也可以用贝塔函数来定义二项式系数：

$$\binom{n}{k}=\frac{1}{(n+1)\mathrm{B}(n-k+1,k+1)}$$

伽玛函数与贝塔函数之间的关系

为了推出两种函数之间的关系，我们把两个阶乘的乘积写为：

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}\,\mathrm{d}u\int_0^\infty e^{-v}v^{y-1}\,\mathrm{d}v.$$

现在，设$u=a^2, v=b^2$，因此：

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=4\int_0^\infty e^{-a^2}a^{2x-1}\mathrm{d}a\int_0^\infty e^{-b^2}b^{2y-1}\,\mathrm{d}b\\&=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(a^2+b^2)}|a|^{2x-1}|b|^{2y-1}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b.\end{aligned}$$

利用变量代换$a=r\cos\theta$和$b=r\sin\theta$，可得：

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}|r\cos\theta|^{2x-1}|r\sin\theta|^{2y-1}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2x+2y-2}r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}|(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}|\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(x+y-1)}\,\mathrm{d}(r^2)\,4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(x+y)\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(x+y)\mathrm{B}(x,y).\end{aligned}$$

因此，有：

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

导数

贝塔函数的导数是：

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right)=\mathrm{B}(x,y)(\psi(x)-\psi(x+y))$$

其中$\psi(x)$是双伽玛函数。

估计

斯特灵公式给出了一个用来近似计算贝塔函数的公式：

$$\mathrm{B}(x,y)\approx\sqrt{2\pi}\frac{x^{x-\frac{1}{2}}y^{y-\frac{1}{2}}}{(x+y)^{x+y-\frac{1}{2}}}.$$

不完全贝塔函数

不完全贝塔函数是贝塔函数的一个推广，把贝塔函数中的定积分用不定积分来代替，就像不完全伽玛函数是伽玛函数的推广一样。

不完全贝塔函数定义为：

$$\mathrm{B}(x;\,a,b)=\int_0^x t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt.$$

当$x = 1$，上式即化为贝塔函数。

正则不完全贝塔函数（或简称**正则贝塔函数**）由贝塔函数和不完全贝塔函数来定义：

$$I_x(a,b)=\frac{\mathrm{B}(x;\,a,b)}{\mathrm{B}(a,b)}.$$

当a和b是整数时，计算以上的积分（可以用分部积分法），可得：

$$I_x(a,b)=\sum_{j=a}^{a+b-1}\frac{(a+b-1)!}{j!(a+b-1-j)!}x^j(1-x)^{a+b-1-j}.$$

正则不完全贝塔函数是B分布的累積分布函數，可由二項式分布描述一個實隨機變量X的機率分布：

$$F(k;n,p)=\Pr(X\le k)=I_{1-p}(n-k,k+1)=1-I_p(k+1,n-k)$$

其中p為試驗成功機率，n為樣本數。

性质

$$I_0(a,b)=0$$
$$I_1(a,b)=1$$
$$I_x(a,b)=1-I_{1-x}(b,a)$$

参见

- B分布
- 二项分布
- 伽玛函数

参考文献

- M. Zelen and N. C. Severo. in Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York: Dover, 1972. *（See §6.2, 6.6, and 26.5） (http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_258.htm) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20080524230939/http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_258.htm)，存于互联网档案馆）*
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling. *Numerical Recipes (https://web.archive.org/web/20080516044136/http://www.nr.com/) in C*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992. Second edition. *(See section 6.4)*
- PlanetMath上用拉普拉斯变换来计算贝塔函数 (https://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=6206)的資料。

外部链接

- 贝塔函数计算器 (https://web.archive.org/web/20080711054908/http://www.danielsoper.com/statcalc/calc35.aspx)
- 不完全贝塔函数计算器 (https://web.archive.org/web/20070120151547/http://www.danielsoper.com/statcalc/calc36.aspx)
- 正则不完全贝塔函数计算器 (https://web.archive.org/web/20070120151557/http://www.danielsoper.com/statcalc/calc37.aspx)